LEZIONE # 7

Uno strumento si dice *dinamicamente lineare* se è possibile descrivere il moto del suo equipaggio mobile (uscita dello strumento) mediante un equazione differenziale lineare (a coefficienti costanti).

y(t) → Strumento → ***x(t)***   per esempio: $a\dfrac{d^2x}{dt^2}+b\dfrac{dx}{dt}+cx=y(t)$

y(t) → grandezza in ingresso (*misurando*)
x(t) → grandezza in uscita (*deflessione o risposta dello strumento*)

come noto, la soluzione dell'equazione differenziale di sopra può essere scritta nella forma:

$$x(t)=x_{tr}(t)+x_{rg}(t)$$

soluzione dell'omogenea associata
rappresenta il transitorio dello strumento

integrale particolare
descrive la risposta a regime per il particolare ingresso in esame

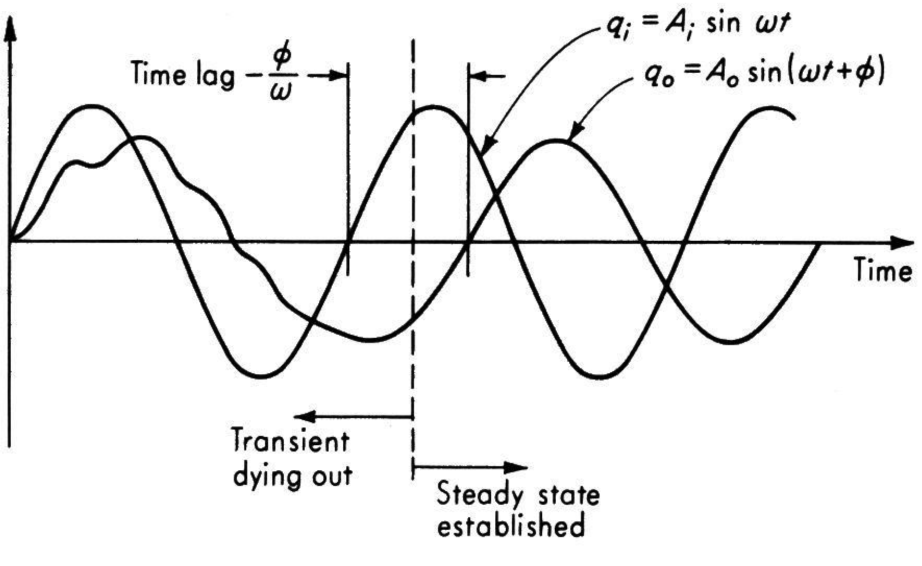

Figura 7.1

Lo studio dinamico di uno strumento viene condotto per mezzo di *due ingressi di prova tipici*, particolarmente adatti a mettere in evidenza le caratteristiche dinamiche che si manifestano nel transitorio (di inserzione) di uno strumento e nel comportamento a regime. Per lo studio di $x_{tr}(t)$ si utilizzerà la ***risposta al gradino*** mentre per lo studio di $x_{rg}(t)$ si farà riferimento alla ***risposta in frequenza***.

Strumenti di ordine zero:
Quando l'equazione differenziale si presenta nella forma più semplice, senza termini con le derivate

$a \cdot x = b \cdot y \quad \rightarrow \quad x = \frac{b}{a} y$ il segnale (o l'indicazione) in uscita è direttamente proporzionale alla grandezza in ingresso !

nell'equazione dinamica la variabile tempo non compare in forma esplicita quindi, la risposta dello strumento è istantanea, non c'è ritardo tra ingresso e uscita … si tratta di un comportamento dinamico ideale che solo pochi strumenti riescono ad approssimare.

esempio: il potenziometro come trasduttore di spostamento *y(t)*

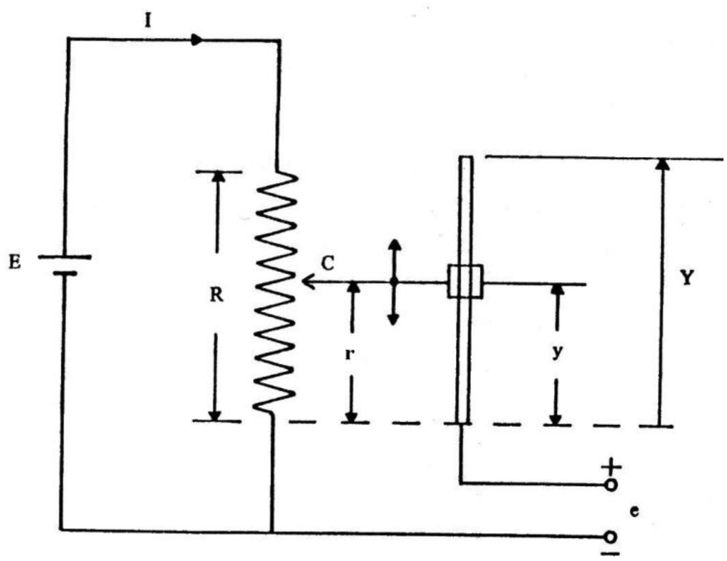

Figura 7.2

la maglia chiusa alla sinistra del circuito è alimentata dalla batteria E, vale quindi $E = R \cdot I$. In un istante di tempo qualunque, la spazzola, che si trova nella generica posizione *y(t)*, fornisce in uscita una differenza di potenziale *e(t)* proporzionale alla resistenza *r(t)* che è una partizione di *R* ;

ma $R = \rho \frac{Y}{S}$ e $r(t) = \rho \frac{y(t)}{S}$

dove con *S* si è indicata la sezione del filo che costituisce la resistenza;

quindi $e(t) = r(t) I = r(t) \frac{E}{R} = \frac{r(t)}{R} E = \frac{\rho \cdot y(t)/S}{\rho \cdot Y/S} E = \frac{y(t)}{Y} E$

dove la variabile tempo t non compare esplicitamente, ma solo come variabile indipendente della posizione $y = y(t)$.

Si osservi che $e = \frac{E}{Y} y$ è anche la *curva di graduazione* del potenziometro, impiegato come trasduttore di posizione, infatti la derivata $\frac{de}{dy} = \frac{E}{Y}$ è la *sensibilità* del trasduttore espressa in [V/m].

Il fatto che l'equazione dinamica di uno strumento possa coincidere con la curva di graduazione accade solo per strumenti di ordine zero.
Uno strumento di ordine zero risponde istantaneamente alle variazioni dell'ingresso perché al suo interno non ha luoghi o elementi dove l'energia in transito può essere immagazzinata.

Strumenti del 1° ordine:
uno strumento capace di *immagazzinare energia* (meccanica, termica, elettrica …) in *una sola forma*, in un luogo interno ovvero in uno dei suoi elementi costitutivi (molla, massa, condensatore …) è uno strumento del primo ordine.
Lo studio dinamico degli strumenti del 1° ordine verrà condotto a partire da un esempio meccanico schematico, ovvero uno strumento costituito da un indicatore *S virtualmente privo di massa*, sostenuto al telaio da un elemento elastico di costante *k* e da uno smorzatore viscoso di costante *c*.

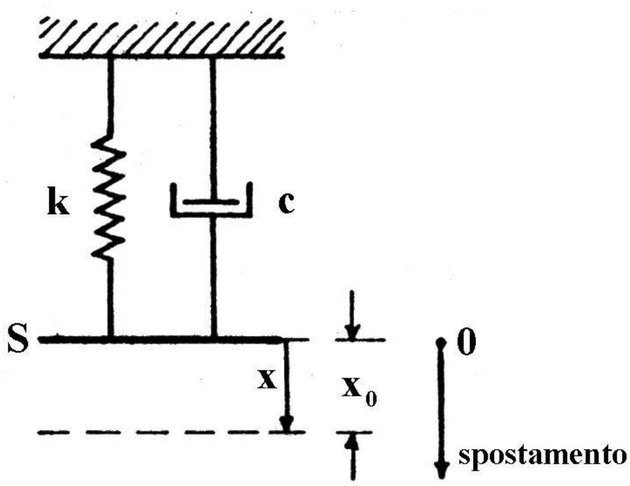

Figura 7.3

si inizi immaginando di tirare manualmente l'indicatore *S* fino alla posizione $x_0 \neq 0$

all'istante $t=0$ si immagini di lasciare improvvisamente l'indicatore *S*

l'energia elastica immagazzinata nella molla *k* viene quindi liberata e tende a riportare l'indicatore *S* nella posizione d'equilibrio $x=0$

durante lo spostamento verso $x=0$ lo smorzatore esercita una forza che si oppone al moto stesso

In ogni istante *t* del moto, fino al raggiungimento della posizione $x=0$ vale l'equilibrio delle forze:
$kx = -c\dot{x}$ ovvero $c\dot{x} + kx = 0$ che è *un'equazione differenziale del 1° ordine omogenea;*
in tutta la fase del moto la velocità dell'indicatore *S* è $\dot{x} = -\frac{k}{c}x$ proporzionale alla posizione raggiunta. Si noti che essendo *x* uno spostamento, quindi con dimensioni [L] , il coefficiente $\frac{k}{c}$ deve avere le dimensioni di [t^{-1}]. Per cui si ha che $\left[\frac{c}{k}\right] = [t]$ ha le dimensioni di un tempo.

$\frac{c}{k} = \lambda$ è la ***costante di tempo*** dello strumento del 1° ordine in esame.

La *soluzione generale* dell'equazione differenziale del 1° ordine di sopra è ben nota ed è un esponenziale decrescente:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{-\frac{k}{c}t}$$

il grafico dello spostamento in funzione del tempo è riportato sotto nella figura 7.4.

Per $t = 0 \;\rightarrow\; x(0) = x_0$ si ha la *condizione iniziale,*

$\dot{x}(0) = -\frac{k}{c}x_0 = -\frac{x_0}{c/k}$ è la tangente alla curva dello spostamento in $x_0 = x(0)$

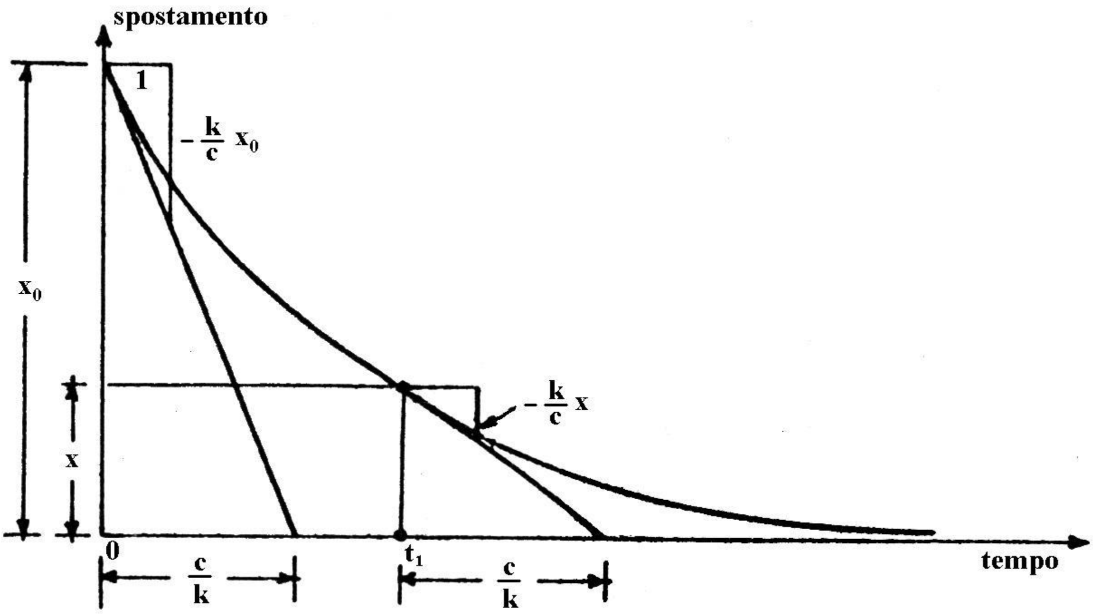

Figura 7.4

Si osservi che la costante di tempo $\lambda = \frac{c}{k}$ ha un significato geometrico notevole: è la *sottotangente* alla curva nel punto $x_0 = x(0)$, o anche in un qualunque altro punto $x(t)$ della curva di traiettoria.
Al tempo $t = \lambda$ si ha $x(\lambda) = x_0 e^{-1} = 0.37 \cdot x_0$ l'indicatore *S* ha viaggiato circa il 63% della traiettoria che deve percorrere per tornare alla posizione di equilibrio *x=0*.

Nel caso generale si considera la ***risposta al gradino*** dello strumento. Lo strumento in esame ha come grandezza d'ingresso una forza, applicata in qualche modo direttamente all'indicatore *S*. La risposta al gradino è un buon modello per lo studio dei *transitori d'inserzione* dello strumento.
Se al tempo t = 0 viene applicata istantaneamente una forza costante F_0 l'equazione differenziale che descrive il moto dell'indicatore è

$$c\dot{x} + kx = F_0$$

che è ancora un equazione differenziale del 1° ordine, ma non omogenea. La soluzione completa di un equazione differenziale del genere, come già richiamato, ha la forma $x(t) = x_{tr} + x_{rg}$ dove x_{tr} è *l'integrale generale dell'omogenea associata* e descrive il transitorio d'inserzione dello strumento, mentre x_{rg} è un *integrale particolare* e descrive il comportamento a regime dello strumento.
Si osservi che a regime (per *t*→∞) la velocità dell'indicatore è necessariamente nulla ($\dot{x} = 0$) quindi la posizione assunta dall'indicatore è $x_{rg} = \frac{F_0}{k}$. Questo è un integrale particolare dell'equazione differenziale. L'integrale generale ha una forma analoga a quella appena studiata, ma rovesciata. E' quindi un esponenziale crescente $x_{tr} = -\frac{F_0}{k}e^{-\frac{k}{c}t}$. La soluzione finale è la somma dei due integrali

$$x(t) = x_{tr} + x_{rg} = -\frac{F_0}{k} e^{-\frac{k}{c}t} + \frac{F_0}{k} = \frac{F_0}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{c}t}\right)$$

si osservi nuovamente sulla figura 7.5 il significato geometrico della costante di tempo $\lambda = \frac{c}{k}$ quale sottotangente alla curva nel punto *x(0)* infatti $tg\alpha = \frac{F_0 / k}{\lambda} = \dot{x}(0)$.

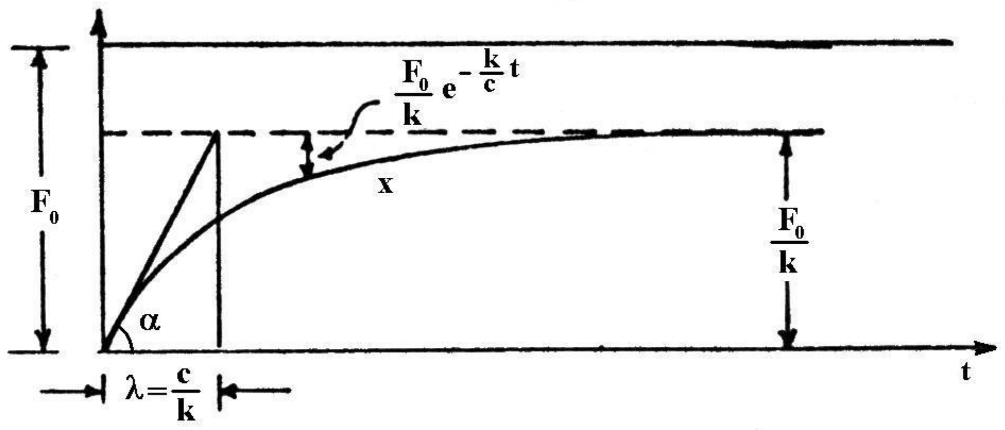

Figura 7.5

si osservi infine che per $t = \lambda$ vale $x(\lambda) = \frac{F_0}{k}\left(1 - e^{-1}\right) = 0.63\frac{F_0}{k}$ ovvero l'indicatore *S* ha percorso il 63% della sua strada per raggiungere la posizione d'equilibrio finale $x_{rg} = \frac{F_0}{k}$.

Quando si è interessati soprattutto a studiare la rapidità dello strumento nelle condizioni di regime, lo schema più idoneo è quello della ***risposta in frequenza*** dello strumento.

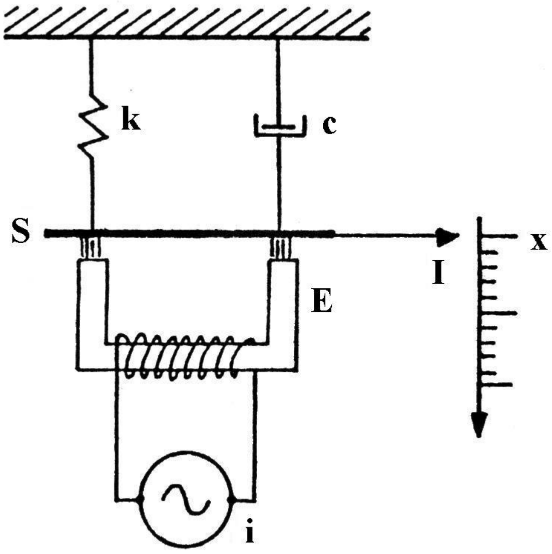

Figura 7.6

Per studiare la risposta in frequenza di uno strumento occorre che al suo equipaggio mobile, o più in generale al suo ingresso, sia inviato un segnale periodico con un contenuto armonico qualunque. Per le ragioni già discusse, è possibile fare riferimento ad un segnale puramente sinusoidale con frequenza variabile. Una possibile modalità per applicare un ingresso sinusoidale allo strumento meccanico del 1° ordine studiato fin'ora, è schematizzata di fianco nella figura 7.6.

Al telaio S, supposto metallico, viene applicata con continuità la forza: $F(t) = F_0 sen\omega t$

Un tale ingresso non produce a regime alcuna posizione d'equilibrio.

L'equazione differenziale che descrive il moto dell'indicatore I è: $c\dot{x}+kx=F_0 sen\omega t$

Si cercherà ora di comprendere come varia l'ampiezza dell'indicazione in uscita *x(t)* al variare della frequenza *ω* della grandezza di ingresso e che ritardo avrà la risposta dello strumento al variare della frequenza *ω* della *F(t)*.
La soluzione dell'equazione differenziale di sopra avrà ancora la forma $x(t)=x_{tr}+x_{rg}$

In questa fase non si è più interessati all'integrale generale x_{tr} e si cerca solo di individuare un possibile integrale particolare x_{rg}. Per un ingresso sinusoidale elementare quale quello ipotizzato, se la frequenza *ω* non è troppo elevata, vi saranno buone probabilità che lo strumento riesca ad indicare in uscita una sinusoide che ha la stessa frequenza del segnale in ingresso ma possiede uno sfasamento *φ* (ritardo): $x_{rg}(t)=X_0 sen(\omega t+\varphi)$

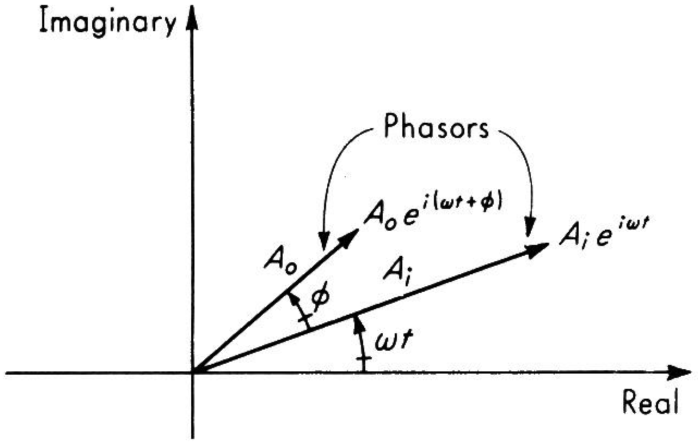

Figura 7.7

E' conveniente scrivere nell'equazione differenziale i termini di ingresso e di uscita in notazione esponenziale. Questa è una descrizione matematica dei vettori rappresentativi (***fasori***) dell'ingresso e dell'uscita nel piano complesso.

ingresso: $F(t)=F_0 e^{j\omega t}$

uscita: $x(t)=X_0 e^{j\omega t}e^{j\varphi}$

Per ricavare l'integrale particolare, si sostituiscono i termini di sopra nell'equazione differenziale del moto dell'equipaggio mobile:

$$j\omega c X_0 e^{j\omega t}e^{j\varphi}+kX_0 e^{j\omega t}e^{j\varphi}=F_0 e^{j\omega t}$$

$$X_0 e^{j\varphi}\left(j\omega c+k\right)=F_0$$

$$X_0 e^{j\varphi}=\frac{F_0}{j\omega c+k}=\frac{\frac{F_0}{k}}{j\omega\frac{c}{k}+1}$$ dove $\frac{F_0}{k}$ è lo *spostamento massimo* e $\frac{c}{k}=\lambda$ è la *costante di tempo*

Razionalizzando i termini e calcolando il modulo della funzione razionalizzata si ottiene:

$$X_0=\frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{(\omega\lambda)^2+1}} \qquad \frac{X_0}{\frac{F_0}{k}}=G=\frac{1}{\sqrt{(\omega\lambda)^2+1}}$$

il rapporto tra l'ampiezza dell'indicazione in uscita e dello spostamento massimo dell'equipaggio mobile dello strumento (a frequenza virtualmente nulla) è l'***amplificazione*** o ***guadagno***, mentre

$$\varphi=arctg(-\omega\lambda)$$

l’arco tangente del rapporto tra parte immaginaria e parte reale della risposta complessa è ***l’angolo di ritardo dell’uscita*** o ***sfasamento tra ingresso e uscita*** dello strumento !

Il guadagno e lo sfasamento degli strumenti del primo ordine vengono riportati su un diagramma cartesiano in funzione della frequenza ridotta $\omega\lambda$. In tal modo, i grafici risultano adimensionali ed hanno la medesima forma per ogni strumento del 1° ordine, come in figura 7.8. Dipendentemente dal valore di λ , che deve essere determinato per ciascuno strumento in esame, resta individuato il valore della ***frequenza caratteristica*** $\omega_c = \dfrac{1}{\lambda}$. La ω_c assume il significato di *frequenza di taglio* ed esprime l’estensione della banda passante a –3db.

Si osservi che per $\omega\lambda = 1$ $\rightarrow$ $G = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cong 0.707$ praticamente $f_c = \dfrac{1}{2\pi \cdot \lambda}$ è la f_t a –3 dB

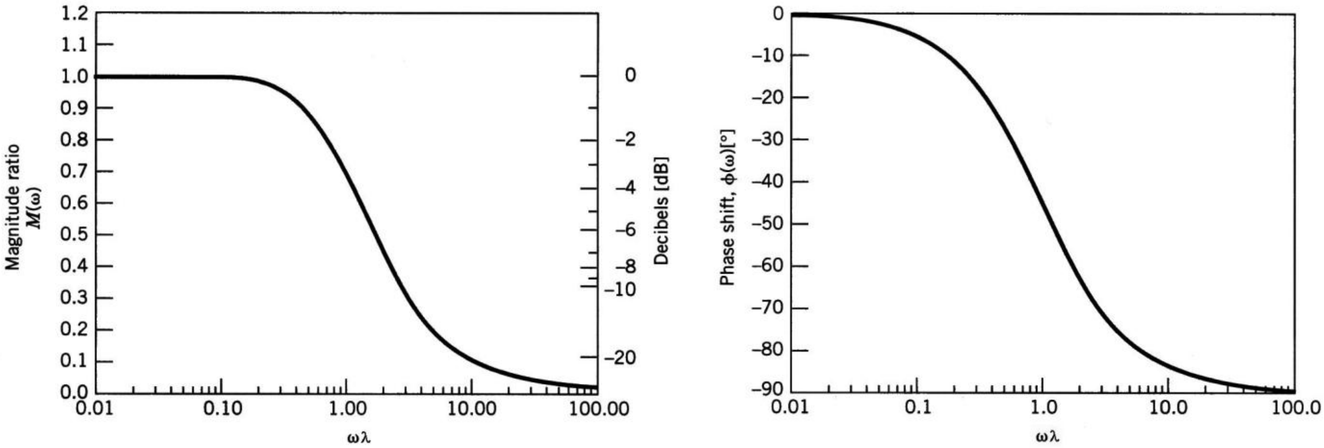

Figura 7.8

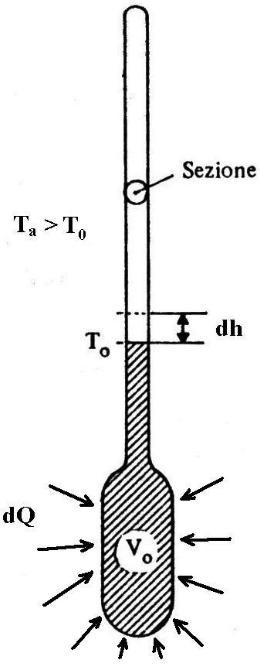

Figura 7.9

Si evidenzia, ancora una volta, per gli strumenti del primo ordine l’importanza della costante di tempo λ, essa rappresenta il parametro fondamentale per lo studio dinamico di detti strumenti.

esempio: dinamica del termometro a liquido

in ogni intervallino di tempo *dt* che precede il raggiungimento dello equilibrio termico, il fluido termometrico riceve la quantità di calore *dQ* dall’ambiente, che si trova a temperatura T_a maggiore della temperatura di partenza T_0 del fluido, ed aumenta la propria temperatura *T*.

$$dQ = kA(T_a - T)dt \qquad\qquad dQ = mc \cdot dT$$

(calore ceduto dall’ambiente) (calore acquistato dal fluido)

dove *m* è la massa del fluido
c è il calore specifico
k è il coefficiente di scambio termico
A è la superficie di scambio termico

$$mc \cdot dT = kA(T_a - T)dt$$
$$mc \cdot \frac{dT}{dt} = kAT_a - kAT$$
$$\frac{mc}{kA} \cdot \frac{dT}{dt} + T = T_a$$

che è l'equazione differenziale rappresentativa della dinamica con cui un termometro a liquido risponde ad un gradino di temperatura in ingresso.

In analogia a quanto osservato per lo strumento meccanico di prima $\lambda = \frac{mc}{kA}$ è la costante di tempo

In conclusione, si osservino con attenzione due fatti fondamentali: nello studio dell'equazione differenziale lineare che descrive la risposta dinamica degli strumenti (1) la soluzione dell'omogenea associata $x_{tr}(t)$ non dipende mai dalla natura della forzante in ingresso e (2) è possibile calcolare un integrale particolare $x_{rg}(t)$ anche per un ingresso a gradino.
Gli ingressi a gradino e sinusoidale rappresentano quindi solamente due schemi particolarmente semplici ed efficaci per lo studio delle caratteristiche dinamiche degli strumenti.

Si osservi infine che la costante di tempo per gli strumenti del 1° ordine facilmente risulta essere dell'ordine dei secondi. Se ipotizziamo, per esempio, una $\lambda = 1s$ si ha con semplici calcoli:

$\omega\lambda = 1 \quad \rightarrow \quad \omega_c \cdot 1 = 1$ da cui si ricava $2\pi f_c = 1 \quad \rightarrow \quad f_c = \frac{1}{2\pi} = 0.16 Hz$

si riconosce subito come gli strumenti del 1° ordine abbiano in genere una frequenza di taglio reale piuttosto bassa e siano quindi poco adatti all'impiego con grandezze in ingresso rapidamente variabili.

Note:

Figure 7.2; 7.3; 7.4; 7.5; 7.6; 7.9 courtesy of:
Branca F.P. – *Misure Meccaniche* – ed. ESA

Figure 7.1; 7.7; 7.8 courtesy of:
Doebelin E.O. – *Measurement systems, application and design* – McGraw Hill